prof. Petr Malý, materiály na moodle 2
zápočet: 2 testy, alespoň 20/30 b 1h 3 př.
testy přibližně 7.4. a 19.5.
zkouška: pís. část 7,5/15 b 3 př. } průměr z
ús. část 2 otázky } pís. a 2 úst.

1. Úvod

historické okénko, vývoj z pozorování elektřiny, magnetismu a dále z optiky

2. Základy vektorové analýzy

$f(x)$ ... fce jedné proměnné
$f(x,y,z,t)$ ... fce více proměnných
$f(\underbrace{x,y,z}_{\vec{r}},t)$

pole = každému bodu prostoru přiřadíme hodnotu

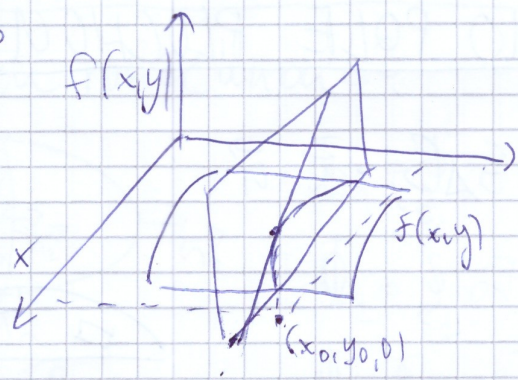
$\vec{a}(x,y,z,t)$ ... vektorová fce

$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ... derivace podle x v x_0

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0,z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$ ... parc. derivace

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

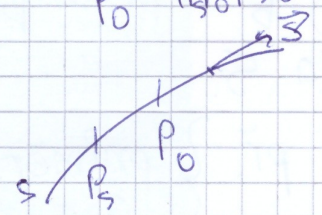
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$



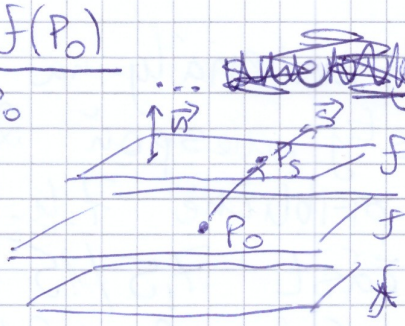
GRADIENT

$$\left.\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial s}\right|_{P_0} = \lim_{|P_sP_0|\to 0} \frac{f(P_s)-f(P_0)}{P_sP_0}$$

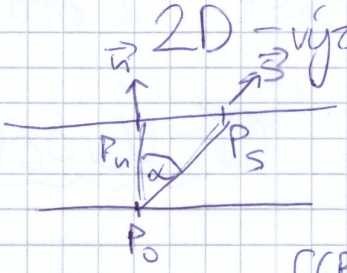
... derivace ve směru



1D



2D – význačný směr $\vec{n}$



$P_0P_n = P_0P_s \cos\alpha$

$$\lim_{P_sP_0\to 0} \frac{f(P_s)-f(P_0)}{P_sP_0} =$$

$$= \lim_{\substack{P_sP_0\to 0 \\ P_nP_0\to 0}} \frac{f(P_n)-f(P_0)}{\frac{P_0P_n}{\cos\alpha}} = \cos\alpha \lim_{P_nP_0\to 0} \frac{f(P_n)-f(P_0)}{P_0P_n} = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial n}$$

pro $\vec{n}, \vec{s}$ jednotk. $\cos\alpha = \vec{n}\cdot\vec{s}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{P_0} \cos\alpha = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial n}\vec{n}}_{\text{grad } f}\cdot\vec{s}$$

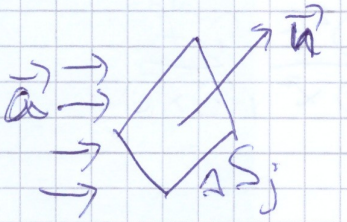
když $\vec{s}=(1,0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial s} = (\text{grad } f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$\Rightarrow \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

– symbol nabla $(\vec{\nabla})$ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\text{grad } f = \nabla f$

TOK VEKTOROVÉHO POLE PLOCHOU A DIVERGENCE



$$\Phi_{\Delta S_j} = \Delta S_j \cdot \vec{a}\cdot\vec{n}$$

obecná větší plocha limitně přes integrál

$$\Phi = \sum_j \Delta S_j \cdot \vec{a}(\vec{r})\cdot\vec{n}_j \xrightarrow{\Delta S\to 0} \boxed{\int \vec{a}(\vec{r})\cdot\vec{n}\, dS = \Phi}$$

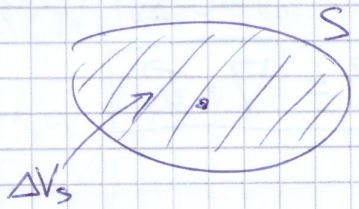
budeme zkoumat tok „v okolí bodu" uvažováním uzavřené plochy, která obklopuje bod

konvence: kladný tok = výtok ven, tedy limitně pro menší plochu blíže bodu

$$\Phi_S = \oint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS$$

když budeme tok normovat (uvažuje se, že dává smysl na objem):

$$\boxed{\frac{\Phi_S}{\Delta V_S} = div\ \vec{a}}$$

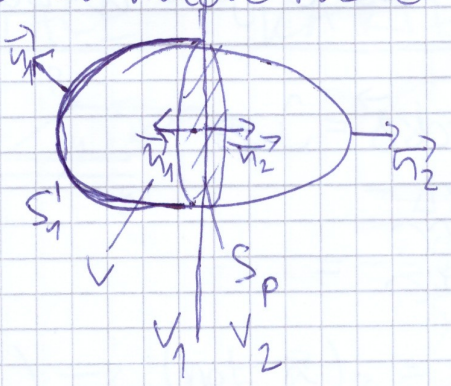


GAUSSOVA VĚTA INTEGRÁLNÍHO POČTU

$$\Phi_S = \sum_j \Phi_{S_j} = \sum \frac{\Phi_{S_j}}{\Delta V_j} \cdot \Delta V_j \xrightarrow[\Delta V_j \to 0]{\Delta S_j \to 0} \int div\ \vec{a}\, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{V(S)} div\ \vec{a}\, dV}$$

proč to můžu rozsekat?

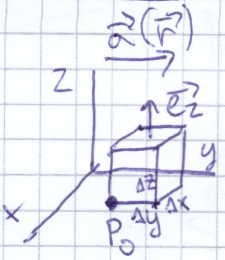


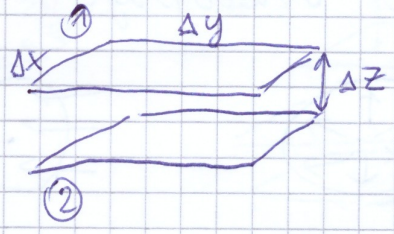
$$\Phi_1 = \oint_{S_1} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\Phi_2 = \oint_{S_2} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS$$

Φ_1, Φ_2 části původního povrchu a navíc 2x přepážka, ty se ale odečtou

DIVERGENCE V KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH





$$\Delta\Phi_z^1 = \Delta x\Delta y\,\vec{a}\cdot\vec{e}_z = \Delta x\Delta y\cdot a_z(x,y,z+\Delta z)$$

$$\Delta\Phi_z^2 = \Delta x\Delta y\,\vec{a}\cdot(-\vec{e}_z) = \Delta x\Delta y\cdot(-a_z(x,y,z))$$

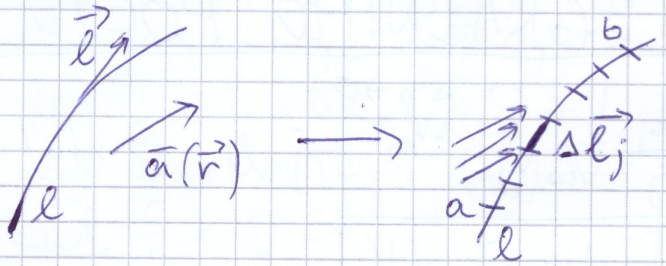
$$\Delta\Phi_z^{1+2} = \Delta x\Delta y\underbrace{\left[a_z(x,y,z+\Delta z)-a_z(x,y,z)\right]}_{\frac{\partial a_z}{\partial z}\cdot\Delta z} = \Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi^{1+2}_{x,y,z} = \Delta x\Delta y\Delta z\left[\frac{\partial a_x}{x}+\frac{\partial a_y}{y}+\frac{\partial a_z}{z}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{a} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{y}+\frac{\partial a_z}{z}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a}}$$

ROTACE A KŘIVKOVÝ INTEGRÁL



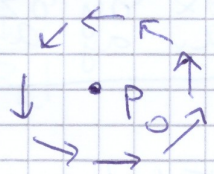
když budu chtít průmět vek. pole do křivky:
$\vec{a}(\vec{r}_j)\cdot\Delta\vec{l}_j$ (skal. souč. podobně jak u toku – záleží na směru)

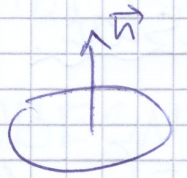
$$\Rightarrow \sum\vec{a}(\vec{r}_j)\cdot\Delta\vec{l}_j \xrightarrow{\Delta l_j\to 0} \int_l \vec{a}(\vec{r}_j)\cdot d\vec{l}$$

speciálně po uzav. křivce $\oint$

CIRKULACE VEKTOROVÉHO POLE PO KŘIVCE

$$C_l(\vec{a}) = \oint_l \vec{a}\cdot d\vec{l}$$



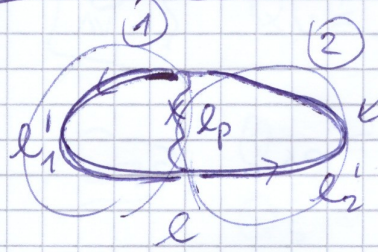


u rovinné křivky dobře určený směr
obdobně budu normovat (na obsah) a
vezmu v limitě

$$\boxed{\lim_{\Delta S_l \to 0} \frac{C_l(\vec{a})}{\Delta S_l} = \mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot\vec{n}}$$

promítám do směru

STOKESOVA VĚTA INTEGRÁLNÍHO POČTU



obecně nerovinná křivka

$$C_{l_1}(\vec{a}) = \int_{l_1'} + \int_{l_p}$$

$$C_{l_2}(\vec{a}) = \int_{l_2'} + \int_{l_p}$$

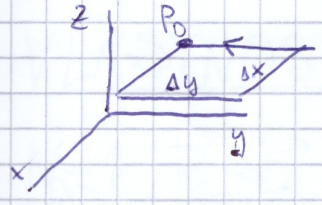
– v opač. směru vyruší se

$$\Rightarrow C_l(\vec{a}) = \sum_j C_{l_j}(\vec{a}) = \sum_j \frac{C_{l_j}(\vec{a})}{\Delta S_j}\cdot\Delta S_j \xrightarrow{\Delta S_j \to 0} \int_{S(l)} \mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS.$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_l \vec{a}(\vec{l})\cdot d\vec{l} = \int_{S(l)} \mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS}$$

– platí $\forall$ plochy ohr. l !!!

ROTACE V KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH



$$C = \Delta x\cdot a_x(x,y,z) + \Delta y\cdot a_y(x+\Delta x,y,z) - \Delta x\cdot a_x(x,y+\Delta y,z) - \Delta y\cdot a_y(x,y,z)$$

$$= -\frac{\partial a_x}{\partial y}\Delta y\cdot\Delta x + \frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta y\,\Delta x$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta x,\Delta y\to 0}}\right) \to (\mathrm{rot}\,\vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$, obdobně pro x, y

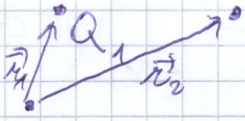
$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\,\vec{a}}$$

3. Elektrostatika, východiska elstat.

Q, q ... elektrický náboj (skalár), $[Q] - C$ ... coulomb
- zákon zachování el. náboje
- invariance vůči pohybu (i v relat.)
- kladný nebo záporný, dá se sčítat
- kvantovaný $Q = p \cdot e$, e - elem. náboj, $p \in \mathbb{Z}$ (pro vol.
(pozn. $p = \pm 1/3, \pm 2/3$ pro kvarky, $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C

COULOMBŮV ZÁKON

- a bodový náboj



$$\boxed{\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}}$$ COULOMBŮV ZÁKON

$Q_1 Q_2 > 0 \Rightarrow F > 0$ - náboje se odpuzují
$Q_1 Q_2 < 0 \Rightarrow F < 0$ - náboje se přitahují

ε_0 - permitivita vakua, $\varepsilon_0 \doteq 8{,}854\,187\,8128 \cdot 10^{-12}$ F/m

$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] = N \cdot \frac{1}{C^2} m^2 \Rightarrow [\varepsilon_0] = \frac{C^2}{N m^2}$

PRINCIP SUPERPOZICE

Silové působení mezi 2 náboji není ovlivněno přítomností dalších nábojů.

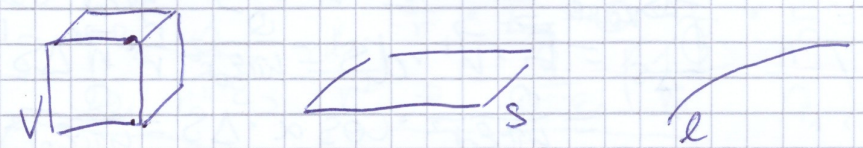
$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$, $\vec{F}_{23} = \dots$, $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$

když vezmu na jednotkový náboj – intenzita el. pole

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_k}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_k|^2} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_k}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_k|}$$

$$\vec{F}_{Q_0} = Q_0 \cdot \vec{E}(\vec{r}_0), \quad [E] = \frac{N}{C}$$

OBECNĚJŠÍ ROZLOŽENÍ NÁBOJE



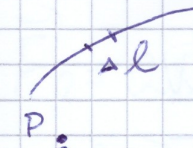
objemový plošný délkový bodový

$Q_{\Delta V} = \varrho \Delta V$, kde ϱ je objemová hustota náboje

$Q_V = \int_V \varrho(\vec{r})\, dV$

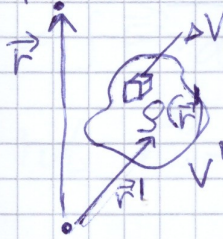
$Q_{\Delta S} = \sigma \Delta S$, kde σ je plošná hustota náboje

$Q_S = \int_S \sigma(\vec{r})\, dS$



$Q_{\Delta \ell} = \lambda \Delta \ell$, kde λ je délková hustota náboje

$Q_\ell = \int_\ell \lambda(\vec{r}')\, d\ell$

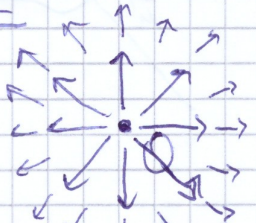


$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_k \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varrho(\vec{r}'_k)\Delta V'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} \xrightarrow{\Delta V'_k \to 0}$$

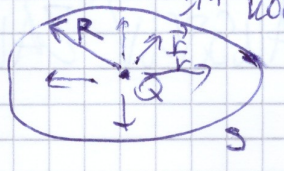
$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dV' = \vec{E}(\vec{r})}$$

VLASTNOSTI ELEKTRICKÉHO POLE

$N = 1$, $\vec{r}_1 = \vec{0}$ $\quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_{01}^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$



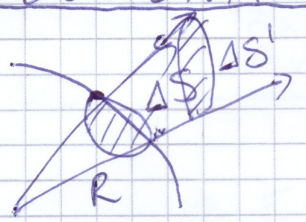
elektrické siločáry – křivky t. ž. $\vec{E}$ tečna



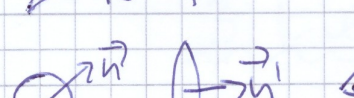
$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}\, dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \oint_S \frac{1}{R^2} dS = \frac{4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} Q = \boxed{\frac{Q}{\varepsilon_0} = \Phi}$$

LIBOVOLNÁ PLOCHA



$d\Omega = \frac{\Delta S}{R^2}$



ΔS $\quad$ $\Delta S'$

$\Omega = \Omega'$

$\Rightarrow \Phi_{\Delta S_{KOULE}} = \Phi_{\Delta S'}$

$\Delta S = \Delta S' \cos\alpha$

$\Phi_{\Delta S_{KOULE}} = \int \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{n}\,\Delta S$

$\Phi_{\Delta S'} = \vec{E}\cdot\vec{n}'\,dS' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{n}'\Delta S' =$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\alpha\cdot\Delta S' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Delta S$

- nezávisí na tvaru plochy, pouze pokud je uvnitř nebo venku

$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, $\vec{E} = \sum_{k=1}^{N}\vec{E}_k = \sum_k \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_k}{r_k^2}\frac{\vec{r}}{r_i}$, $Q := Q_1 + \dots + Q_N$

- superpozice i toků

$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \boxed{\frac{Q}{\varepsilon_0} = \Phi}$ GAUSSŮV ZÁKON

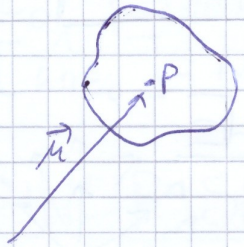
Q-náboj uvnitř

$Q = \int_{V(S)} \varrho(\vec{r})\,dV$

$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$, $\Phi = \frac{\int_{V(S)}\varrho(\vec{r})\,dV}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \varrho(\vec{r})\,dV$

$\boxed{\int_V [\operatorname{div}\vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho]\,dV = 0}$



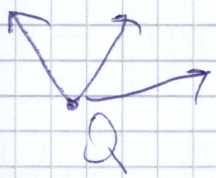
pro objem V platí $\int$, když budeme limitit k bodu platí, $V \to \Delta V$

$[\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r})]\cdot V$, $V \neq 0$

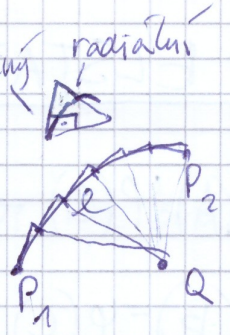
$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r})}$ GAUSSŮV ZÁKON

$\operatorname{div}\vec{E} > 0 \Leftrightarrow \varrho > 0$ $\quad$ $\operatorname{div}\vec{E} < 0 \Leftrightarrow \varrho < 0$

ROTACE EL. POLE



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

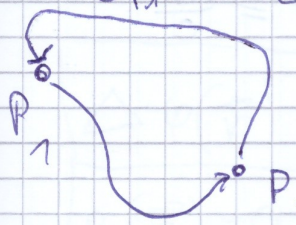


$$\int_{\ell}\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

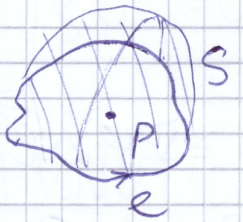
$$\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \approx \sum_j \underbrace{\vec{E}}_{\frac{\vec{r}}{r}}\cdot\underbrace{\Delta\vec{\ell}_T}_{\vec{t}} + \sum \underbrace{\vec{E}}_{\frac{\vec{r}}{r}}\cdot\underbrace{\Delta\vec{\ell}_R}_{\frac{\vec{r}}{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j \frac{1}{r^2}\Delta r_j \to$$

$\vec{t}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = 0$; $\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = 1$

$$\to \int_{P_1}^{P_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{P_2}} - \frac{1}{r_{P_1}}\right)$$ – invariantní vůči cestě



$$\boxed{\oint_{\ell}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0}$$, když nyní použiju Stok.v.



$$\oint_{\ell}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{S(\ell)} \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

když budu limitit ℓ, S k bodu P

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0}$$

$\vec{F}_Q = Q\vec{E}$, pro jednot. náb. $\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \rightsquigarrow Q\int\vec{E}\,d\vec{\ell} =$

$= \int\vec{F}\cdot d\vec{\ell} = W = 0$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0$$

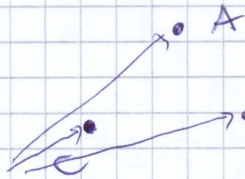
$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

POTENCIÁL ELSTAT. POLE

$\varphi = \varphi(\vec{r})$ $\quad \varphi(A) = \varphi(C) - \int_C^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$

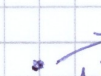


$\varphi(B) = \varphi(C) - \int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$\varphi(B) - \varphi(A) = \int_C^A \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l} =$

$= -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ – nejde o abs. h. φ, ale o změnu φ od bodu k bodu, $[\varphi] = \frac{Nm}{C}$

POTENCIÁL V KART. SOUŘ.



$\Delta\varphi = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$

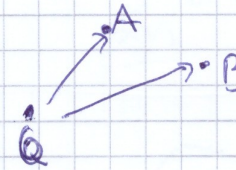
$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l}\cdot\Delta l \overset{\text{der. ve sm. } \Delta l}{=} \text{grad}\,\varphi \cdot \frac{\Delta\vec{l}}{\Delta l}\cdot\Delta l = \nabla\varphi\,\Delta\vec{l}$

$-E\cdot d\vec{l} = \nabla\varphi\,\Delta\vec{l} \quad \overset{\Delta\vec{l}\to 0}{\to} \quad [\nabla\varphi - \vec{E}]\,d\vec{l} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi}$

formálně: potenciál je skalární fce v prostoru t. ž.

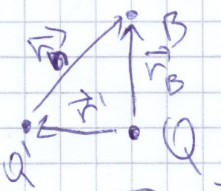
$\nabla\varphi = -\vec{E}$, $\text{rot}\,\vec{E} = 0$ – konz. pole



$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$ – rozdíl potenciálů

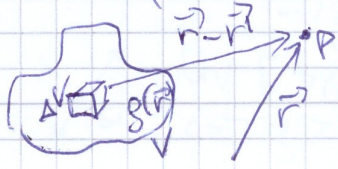
$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

když $r_A \to \infty$, $\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_B}$ – vztahujeme potenciál k nekonečnu, asi nejrozumnější volba



$\vec{r}_n = \vec{r}_B - \vec{r}_n$ – posun Q, použiji pro objem. pole

$|\vec{r}_n| = |\vec{r}_B - \vec{r}_N|$



$\vec{E} = \sum_j \vec{E}_j$

$\Rightarrow \varphi = \sum_j \varphi_j$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

φ – práce na 1 C, ale pozor na znaménko

když $\vec{E} = -\nabla\varphi$, $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot\nabla\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} = \nabla\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{\Delta \text{ LAPLACEOU}}\varphi$$

∇^2 OPERÁTOR

$$\boxed{\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \quad \text{POISSONOVA RCE}$$

$$\boxed{\varrho(\vec{r}) = 0 : \Delta\varphi(\vec{r}) = 0} \quad \text{LAPLACEOVA RCE}$$

SHRNUTÍ

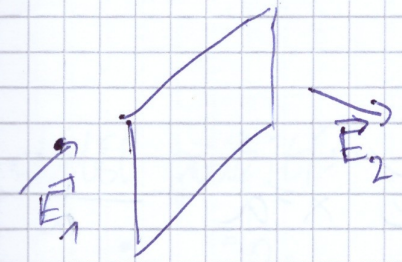
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}\cdot\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \quad \text{COULOMB}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad \text{GAUSS} \qquad \nabla\times\vec{E} = 0 \quad \text{ROTACE}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS \qquad \oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad \text{POTENCIÁL}$$

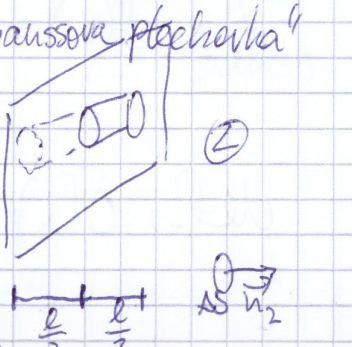
ELSTAT. NA ROZHRANÍ



normálové složky:

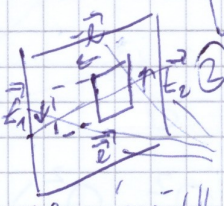
$$\vec{E}_1\cdot\vec{n}_1\Delta S + \vec{E}_2\cdot\vec{n}_2\Delta S + \int_{\text{PLÁŠŤ}_1} + \int_{\text{PLÁŠŤ}_2} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\ell\to 0}$$

$$\xrightarrow{\ell\to 0} \left[(\vec{E}_1\cdot\vec{n}_1)+(\vec{E}_2\cdot\vec{n}_2)\right]\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1\cdot\vec{n}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{n}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



ale $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{n}_2 &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ E_{2n} - E_{1n} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\end{aligned}}$

tečné složky: $\oint_{\text{RÁMEČEK}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$



„Gaussův rámeček"

Id jednotk.

$\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1\cdot d + \vec{E}_1\cdot\vec{t}\cdot\frac{\ell}{2} + \vec{E}_2\cdot\vec{t}\cdot\frac{\ell}{2} +$

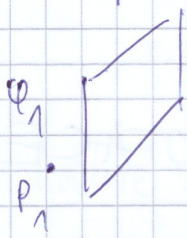
$+\vec{E}_2\cdot\vec{E}_2\cdot d - \vec{E}_2\cdot\vec{t}\cdot\frac{\ell}{2} - \vec{E}_1\cdot\vec{t}\cdot\frac{\ell}{2} = 0$

$\ell \to 0 \longrightarrow \vec{E}_1\cdot\vec{E}_1\cdot d + \vec{E}_2\cdot\vec{E}_2\cdot d = 0$

$\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{E}_2 = 0$

ale $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{E}_2 &= 0 \\ E_{2t} - E_{1t} &= 0\end{aligned}}$

a co potenciál?



$\boxed{\Delta\varphi = 0}$ $\quad \Delta\varphi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$ $\quad \to 0,\ P_1 \to P_2$

*DIRACOVA δ-FCE

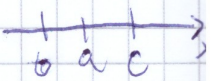
$\delta : f(x) \mapsto f(a)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

t.z. $f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx$

def.: $\delta(x)$: $\delta(x-a) = 0$, kromě $x = a$

$\int_b^c \delta(x-a)\,dx = 1$, pokud $a \in (b,c)$

$= 0$ jinde



– „limita" Gaussovy distribuce pro menší šířku/rozptyl

použití: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$? $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) =$

$\odot Q$ pro $\vec{r} = \vec{0}$ $\qquad = 3 \cdot \frac{1}{r^3} - 3 \cdot \frac{r^2}{r^5} = 0$

vyřeším uděláním nenulové koule kolem náboje, div venku je nula, vemitř limitím pro $R \to 0$, ale pořád počítám v objemu

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) dV \overset{G.V.}{\underset{I.P.}{=}} \oint_{S(V)} \frac{1}{r^2} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}}_{1} \cdot dS = \frac{1}{R^2} \cdot \overbrace{\oint_{S(V)} dS}^{4\pi R^2} = 4\pi$$

– nezávisí na R

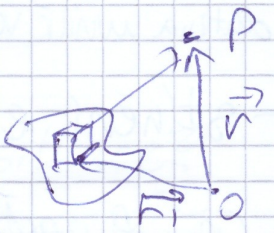
$$\Rightarrow \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \begin{matrix} 0 & r \neq 0 \\ 4\pi & r \to 0 \end{matrix}$$

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{a}) = \delta(x - a_x)\,\delta(y - a_y)\,\delta(z - a_z) \quad , a = 0$$

$$\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 4\pi \cdot \delta^3(\vec{r})$$, když posun $\overset{\bullet}{Q} \leftarrow \overset{\bullet}{\vec{r}'}$

$$\nabla \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 4\pi\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

když objemový náboj



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}')\, dV'$$

čárk.

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}')\, \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right) dV' =$$

nečárk.

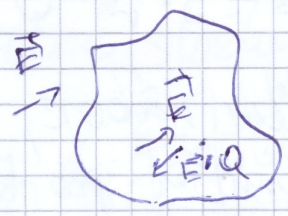
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} 4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, \rho(\vec{r}')\, dV' = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})}_{\text{hle, Gauss}}$$

další použití:

$$\sum_j Q_j \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) = \rho(\vec{r})$$

VODIČE V ELSTAT.

kovy mají delokalizované ē ≈ vodič pro elstat.

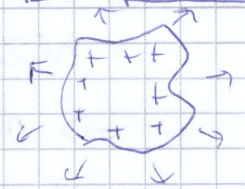


$\vec{F} = Q\vec{E}$, chceme stac. případ, takže

$\vec{E}_{UVNITŘ} = \vec{0}$ (náboje se rozmístí, aby vykompenzovaly pole)

$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{Q_{UVNITŘ}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{UVNITŘ} = 0$ – náboj se rozmístí na povrchu

elstat. indukce



$\oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$

$\int_{VODIČ} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_{DUTINA} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$ pro lib ℓ

$\Rightarrow \vec{E}_{DUTINA} = \vec{0}$ (pokud $Q_{DUTINA} = 0$)

– stínění el. → Faradayova klec

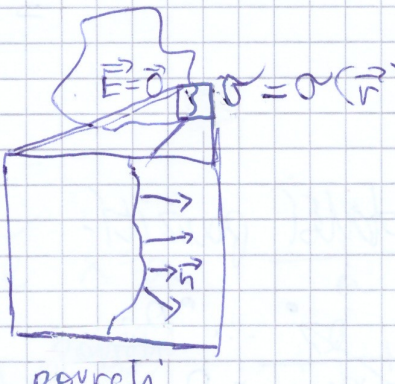
a co φ potenciál? $\Delta\varphi = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$, ale $\vec{E} = \vec{0}$

$\Rightarrow \Delta\varphi = 0$ – ve vodiči konst. potenciál (včetně povrchu)

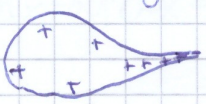
viz dříve σ | $\Delta E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, pro vodič

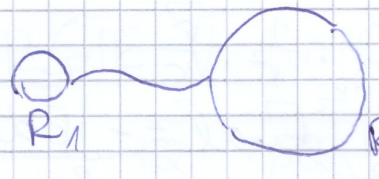
$\Delta E_t = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$ COULOMBOVA VĚTA



důsledek: hromadění náboje na hrot



Př.: 

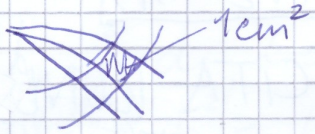
$R_2 > R_1$

$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1}$ $\quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$

- spojím koule $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$; $Q_j = 4\pi R_j^2 \sigma_j$

$\Rightarrow R_1\sigma_1 = R_2\sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{R_2}{R_1}\sigma_2 \quad - \sigma_1 > \sigma_2$

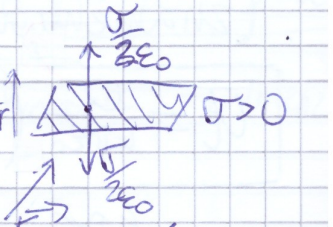
SÍLA/TLAK NA POVRCH VODIČE



$\Delta Q = \sigma \Delta S$

$\Delta \vec{F} = \vec{E} \cdot \Delta Q$

$\vec{E}$ VODIČE VZDÁLENÉ VNĚJŠÍ



$\vec{E}$ VZDÁLENÉ NORMÁLOVÉ (těché se vyruší)

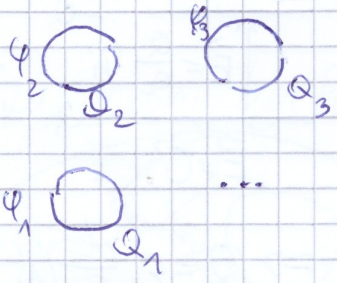
$\rightarrow E_{\text{VZDÁLENÉ NORMÁLOVÉ}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$

$E_{V_n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

celkově $\vec{E}_{V_n} + \vec{E}_\sigma = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ – C. věta platí $\Rightarrow \Delta\vec{F} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma\Delta S\vec{n}$

tlak: $\vec{p} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}$

ZÁKLADNÍ ÚLOHA ELSTAT.



Ustálí se Lib. výchozí situace?
Je toto ustálení jednoznačné?

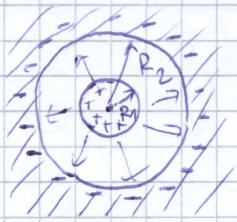
Ano a ano.

pro popis použijeme Laplaceova rci $\Delta\varphi = 0$ – do PC

KONDENZÁTOR

2 vodivá tělesa, která mají stejný, ale opačný náboj a siločary z jednoho končí v tom druhém.

prakticky: koule



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{R_1}^{R_2} E\,dr =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

místo potenciálu se zavede ELEKTRICKÉ NAPĚTÍ (znaménkově stejné jako práce el. pole) $\boxed{U = -(\varphi_2 - \varphi_1)}$

$\boxed{U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$ $\boxed{U = \frac{1}{C} Q}$ KAPACITA VODIČE.

$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2}$ pro kulový kond.

$\boxed{Q = CU}$

$[U] = V = \frac{Nm}{C}$ volt

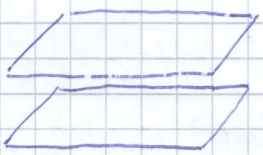
$\Rightarrow [E] = \frac{V}{m}$

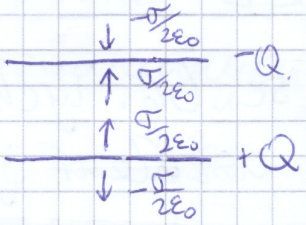
$[C] = F$ – farad

Př.: kapacita „osamocené koule" – $R_2 \to \infty$

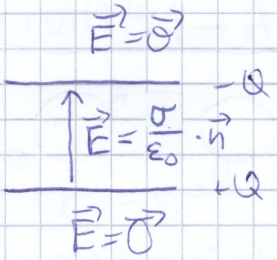
$C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ (jednotka metr)

deskový kondenzátor:





směr →



$\sigma = \frac{Q}{S}$ $U = E \cdot d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{U}{d} = E = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \Rightarrow Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d} U$

$(Q = C \cdot U)$

$\Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$ – znaménko nás moc nezajímá, pouze konvence

ENERGIE V KOND.

——— +Q +ΔQ
——— −Q −ΔQ
) vykonám práci – dávám do kond. energii

$\Delta W = \Delta Q \cdot U$, $Q = CU$, $\Delta Q = C\Delta U$

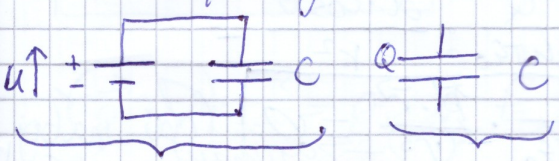
$\Delta W = \Delta Q \cdot \frac{Q}{C} \xrightarrow{\int_{\text{ZAČ.}}^{\text{KON.}}} W = \int_0^{Q_K} \frac{Q}{C}\,dQ = \frac{1}{C} \cdot \left[\frac{1}{2}Q^2\right]_0^{Q_K} \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2C}Q_K^2 = \frac{1}{2}CU^2}$

$U_K = E \cdot d$, $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ $\Rightarrow W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d} d^2 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V_{KOND} E^2$ – E intenz.

$\Rightarrow \boxed{w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$ – „hustota" energie el. pole

Změna kapacity:

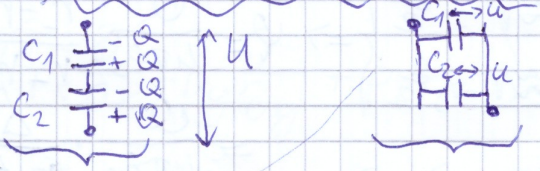
? ΔW, kdy se ΔC



U konst. Q konst.

$\Delta W = \frac{1}{2}U^2 \cdot \Delta C$ $\Delta W = \frac{1}{2}Q^2 \cdot \Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2}Q^2 \frac{1}{C^2}\Delta C = -\frac{1}{2}U^2 \Delta C$

řazení kondenzátorů:



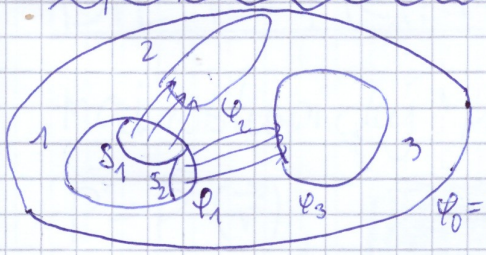
$Q_j = C_j \cdot U_j$

$U = \sum_j \frac{Q_j}{C_j} = Q \boxed{\sum_j \frac{1}{C_j}} = \frac{Q}{C}$

$Q_j = C_j \cdot U_j$

$Q = \sum_j U_j C_j = U \boxed{\sum_j C_j} = C$

*kapacitní koeficienty:



$U_{21} = -(\varphi_2 - \varphi_1)$

$Q_{S_1} = C_{S_1 2} \cdot U_{21}$
$Q_{S_2} = C_{S_2 3} \cdot U_{31}$
...

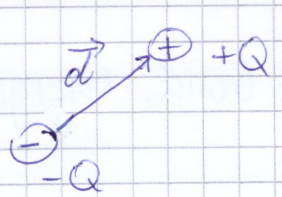
$Q_1 = C_{S_1 2} U_{21} + C_{S_2 3} U_{31} + \dots$
$Q_1 = -C_{S_1 2}(\varphi_2 - \varphi_1) - C_{S_2 3} \cdot (\varphi_3 - \varphi_1) + \dots$

$\Rightarrow Q_1 = (C_{S_1 2} + C_{S_2 3} + \dots)\varphi_1 - C_{S_1 2}\varphi_2 - C_{S_2 3}\varphi_3 - \dots$

$\boxed{Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3 + \dots}$, C_{ij} – kapacitní koeficienty

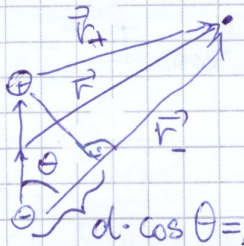
$\Rightarrow Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j$ – SLR $\rightarrow \varphi_j = \sum_i B_{ij} Q_i$, B_{ij} – influenční koef

ELEKTRICKÝ DIPÓL



dipólový moment: $\boxed{\vec{p} = Q \cdot \vec{d}}$

EL. POLE DIPÓLU



$\vec{p} = \vec{p}(\vec{r})$

$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{+Q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-Q}{r_-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-}\right)$

elementární (bodový) dipól: $\vec{p}$ konečné velké

$d \to 0$ ($d \ll r_+, r_-, r$)

$\left.\begin{aligned} r_+ &\approx r - \frac{\Delta}{2} \\ r_- &\approx r + \frac{\Delta}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \approx$

$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta}{(r - \Delta/2)(r + \Delta/2)} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d \cdot \cos\theta}{r^2} =$

$\cos\theta = \frac{\vec{d}}{d} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{\vec{d} \cdot \frac{\vec{r}}{r}}{r^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \varphi}$ (pro náboj v počátku)

zajímavý

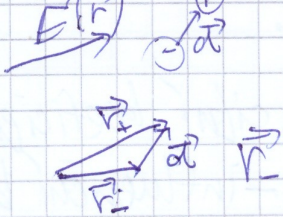
$\vec{E} = -\nabla\varphi$

$(\nabla\varphi)_x = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p_x \cdot x + p_y y + p_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{p_x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \cdot -\frac{3}{2} \cdot 2x\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_x}{r^3} - 3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5} x\right)$

$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}}{r^3} - 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right)$

$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)}$

EL. DIPÓL VE VNĚJŠÍM POLI



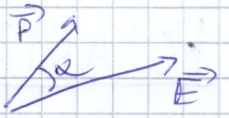
energie: $W = \varphi(\vec{r}_+) \cdot Q - \varphi(\vec{r}_-) Q = Q\underbrace{(\varphi(\vec{r}_+) - \varphi(\vec{r}_-))}_{\frac{\vec{d}}{d} \cdot \nabla\varphi \, d}$

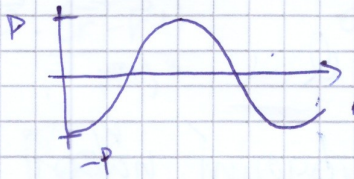
$\vec{r}_- + \vec{d} = \vec{r}_+$, $d \ll r_+, r_-$

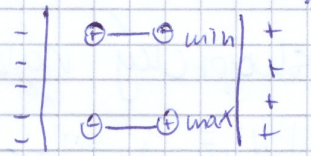
der. ve sm. $\vec{d}$

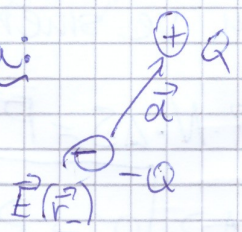
$$W = Q\vec{d}\cdot\nabla\varphi = \vec{p}\cdot\nabla\varphi = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -p\cdot E\cdot\cos\alpha$$

$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$



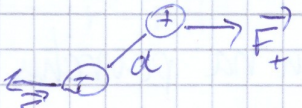




síla: 

$$\vec{F} = Q\vec{E}(\vec{r}_+) - Q\vec{E}(\vec{r}_-)$$

pro homo. pole: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0$ $\quad \vec{F} = \vec{0}$, ale



$$M = dQ\,E_0\sin\alpha$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}_0}$$

$$F_x = Q\left[E_x(\vec{r}_+) - E_x(\vec{r}_-)\right] = (\vec{p}\cdot\nabla)E_x$$

$\vec{d}\cdot\nabla E_x\cdot d$ $\qquad$ POZOR

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}} \qquad (\vec{p}\cdot\nabla) = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$(\vec{p}\cdot\nabla)\cdot\vec{E} = p_x\frac{\partial}{\partial x}E_x + p_y\frac{\partial}{\partial y}E_y + p_z\frac{\partial}{\partial z}E_z \text{, když } \mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p_xE_x + p_yE_y + p_zE_z\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}\cdot\vec{E}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \nabla(\vec{p}\cdot\vec{E})}$$

pro N objemovou hustotu dipólů:

$$\vec{f} = N\vec{F} = (N\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = (\vec{P}\cdot\nabla)\vec{E} =$$

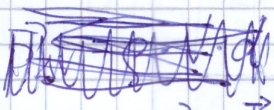
($N\vec{p}$ viz DIELEKTRIKA; $\vec{P}$ viz VLASTNOSTI DIEL.)

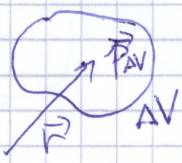
$$= \varepsilon_0\chi(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} \xrightarrow[\nabla\times\vec{E}=\vec{0}]{\text{roz. po složkách}} \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi\nabla E^2$$

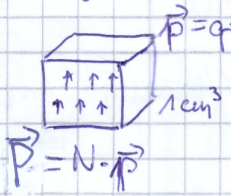
pro řídká pružná diel.

DIELEKTRIKA

makroskopický popis vektorem elektrické polarizace:

$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$, 





$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\substack{\Delta V\to 0\\ (\text{v bodu daným } \vec{r})}} \frac{\vec{P}_{\Delta V}}{\Delta V}}$$

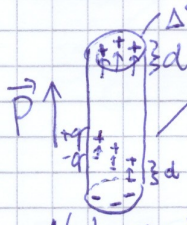
(Úmluva: q – mikro náboj, Q – makro náboj)

$$\vec{P}_{\Delta V} = \int_V \vec{P}(\vec{r})\,dV$$

Formálně pomocí δ-fce: $\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \sum_j \vec{p}_j(\vec{r}_j)\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}_j)}$

POLARIZOVANÉ DIELEKTRIKUM $\vec{P} \neq \vec{0}$

↳ makroskopický náboj Q



když je to homogenní, náboj uvnitř se vykompenzuje, zůstane náboj na povrchu ve směru $\vec{P}$

$$\Delta Q = q \cdot N \cdot \Delta V = q \cdot N \cdot \Delta S \cdot d = p \cdot N \cdot \Delta S = P \cdot \Delta S$$

ΔQ jen na povrchu $\Rightarrow \Delta Q = \sigma_{P\Delta S} \cdot \Delta S \Rightarrow \boxed{\sigma_{P\Delta S} = P}$

$\vec{n} = \frac{\vec{P}}{P}$

$$\Rightarrow \sigma_{P\Delta S'} = \frac{\Delta Q}{\Delta S'} = \frac{\Delta Q}{\Delta S}(\vec{n} \cdot \vec{n}') = P(\vec{n} \cdot \vec{n}') = \boxed{\vec{P} \cdot \vec{n}' = \sigma_{P\Delta S'}}$$

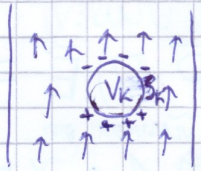
závisí na $\vec{r}$ ⟶

$\Delta S' \cos\alpha = \Delta S$

$\Delta S' \, \vec{n} \cdot \vec{n}' = \Delta S$

$[\sigma_P] = \frac{C}{m^2} \Rightarrow [P] = \frac{C}{m^2} \Leftarrow [p] = C \cdot m$

OBJEMOVÝ NÁBOJ



$$Q_{S_K} = \oint_{S_K(V_K)} \sigma_P(\vec{r})\, dS = \oint_{S_K(V_K)} \vec{P} \cdot \vec{n}\, dS \overset{G.V.}{=} \int_{V_K} \nabla \cdot \vec{P}\, dV$$

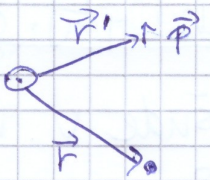
uvnitř není náboj $\{ Q_{V_K} = -Q_{S_K} \Rightarrow \int_{V_K} \varrho_{V_K}(\vec{r})\, dV = -\int_{V_K} \nabla \cdot \vec{P}\, dV$

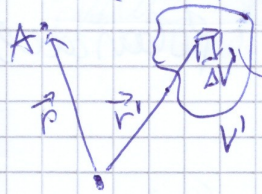
$V \to 0$ v bodu $\Rightarrow \boxed{\varrho_{V_K}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})}$

- hustota „fiktivního" náboje uvnitř mezery vyvolaného polarizací — tzv. „vázaný náboj"

Formálně přes potenciál:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$





$$\vec{p} = \vec{P}\Delta V'$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')\,\Delta V' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{přes } \vec{r}'} \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dV' \quad // \; dx'\,dy'\,dz'$$

protože $\dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \nabla' \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (viz cvičení)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{přes } \vec{r}'} \vec{P}(\vec{r}')\cdot\nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV'$$

protože $\nabla(f\cdot\vec{a}) = f(\nabla\cdot\vec{a}) + \nabla f\cdot\vec{a}$

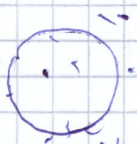
$$\Rightarrow \nabla f\cdot\vec{a} = -f(\nabla\cdot\vec{a}) + \nabla(f\cdot\vec{a})$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\int_{V'} \nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\vec{P}(\vec{r}')\right) dV' - \int_{V'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\nabla\cdot\vec{P}(\vec{r}')\, dV'\right]$$

protože Gaussova věta

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\underbrace{\int_{V'} \nabla'\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dV'}_{\text{objemový } Q} - \underbrace{\oint_{S'(V')} \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dS}_{\text{plošný } Q}\right]$$

MIKRO x MAKRO



$f(x)$ 1D: $\bar{f} = \dfrac{\int f(x)\,dx}{\Delta x}$

3D: $\bar{f} = \dfrac{\int f\, dV}{\Delta V}$ – správně limita, ale fyzikální, tj. nesmí se mi rozbít fyz. vlast.

$\bar{f}$ makro, ΔV milno

vůči tomuto
derivace je „lineární", tj. $\frac{\partial}{\partial x}\overline{f} = \overline{\frac{\partial}{\partial x} f}$

správně by se všude v makros. měly psát čárky, uvažovat polarizaci

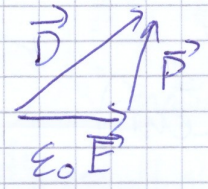
$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho + \varrho_P}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \varrho$$ ← volného náboje

$$\boxed{\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varrho}$$

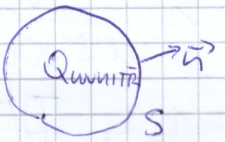
$\vec{D}$ – vektor el. indukce (též vektor el. posunutí)



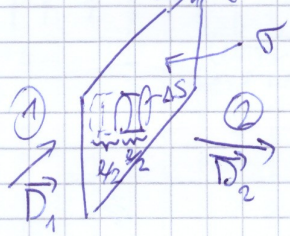
VAKUUM A DIEL.

Gaussův z. z Coulombova z.: $\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q \text{ celý uvnitř}}{\varepsilon_0} \dots \rightarrow$

$\dots \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$, dá se jít i zpětně $\Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS = Q_{uvnitř}$



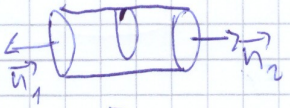
Př.: nabitá rovinná plocha – rozhraní mezi dielektriky



tok $\vec{D}$: $\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \Delta S + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \Delta S + \text{plášť} = \sigma \Delta S$

$\xrightarrow[\text{plášť} \to 0]{e \to 0}$ $\boxed{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_2 = \sigma}$ – obdobně jako u elstat a $\vec{E}$

$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$

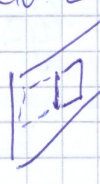


$\vec{n}_1 = \vec{n}_2$

$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t}$

a co tečné složky?

$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$



cirkulace $\vec{E}$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \vec{t}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{t}_2 = \sigma \Delta t$

a co cirk. $\vec{D}$? $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

, když $\oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$: $E_{t1} = E_{t2}$

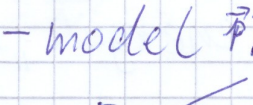
$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_0} - \frac{P_{t1}}{\varepsilon_0} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_0} - \frac{P_{t2}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{D_{t2} - D_{t1} = P_{t2} - P_{t1}}$$

cirkulace $\vec{D}$ obecně po uzav. kř. není nulová, toto nám rozbíjí nenulové $\vec{P}$ (⇒ z $\vec{D}$ nemůžeme dělat potenciál)

VLASTNOSTI DIEL.

1. $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$
   - tvrdá diel.: $\vec{P}(\vec{E}) = P_0$
   - měkká diel.: $\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}(\vec{E})$
     - pružná (lineární) diel.: $\vec{P}(\vec{E}) \propto \vec{E}$ – model



$\vec{E} \neq 0$

$F_E = F_{pruž.}$

$qE = \varkappa d$

$$P = \underbrace{N\frac{q^2}{\varkappa}}_{\varepsilon_0 \chi} E \Leftarrow p = \underbrace{\frac{q^2}{\varkappa}}_{\beta} E \Leftarrow d = \frac{q}{\varkappa} E$$

$\varepsilon_0\chi$ – susceptibilita, β – polarizovatelnost

platí pro $\vec{E} \parallel \vec{P}$:

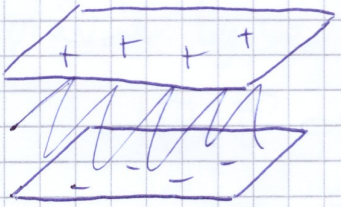
vektorově: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r - \text{relat. perm.}} \vec{E} =$$

$$= \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon_r}_{\varepsilon - \text{permitivita dielektrika}} \vec{E}$$

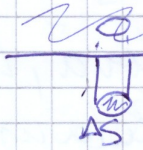
pokud $\vec{E} \nparallel \vec{P}$: $\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E}$ – ε_{ij} tenzor ($\overleftrightarrow{\beta}$ tenzor, $\overleftrightarrow{\chi}$ tenzor)

KONDENZ. A DIEL.



Vložím mezi desky dielektrikum – použijeme Gaussův z. s $\vec{D}$

$U = dE$, $\sigma = \frac{Q}{S}$



$$\oint_{S(V_{PLECHOVKY})} \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = Q$$

$$\Rightarrow D_{VAKUUM}\cdot\Delta S + D_{DIEL}\,\Delta S = \sigma\Delta S$$

($D_{VAKUUM} = \varepsilon E = 0$)

$$\Rightarrow D_{DIEL} = \sigma$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow U = dE = d\frac{\sigma}{\varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{d}{S}\right)Q$$

($1/C$)

$$\Rightarrow \boxed{C = \varepsilon\frac{S}{d}} > \varepsilon_0\frac{S}{d}$$

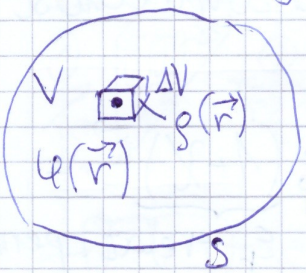
To ale dává smysl: $W = \frac{1}{2}CU^2$, $C_{DIEL} > C_{VAKUUM}$

$\Rightarrow W_{DIEL} > W_{VAKUUM}$ (stejné U)

– dáváme energii „do pružinek" dielektrika

HUSTOTA EL. POLE V DIEL.

pro vakuový kondenz.: $W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$



$Q_{\Delta V} = \rho\Delta V$

když měním ρ: $\delta W_{\Delta V} = \delta\rho\,\varphi\,\Delta V$

$\Delta V \to 0$ ⟶ $\delta W = \int_V \delta\rho\,\varphi\,dV$

když $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$ (G. z.), $\delta\rho = \nabla\cdot\delta\vec{D}$ a $\nabla\cdot(\vec{a}f) = (\nabla\cdot\vec{a})f + \vec{a}\cdot\nabla f$

$$\delta W = \underbrace{\int_V \nabla\cdot(\delta\vec{D}\,\varphi)\,dV}_{\text{G.V.}} - \int_V \delta\vec{D}\cdot\underbrace{\nabla\varphi}_{-\vec{E}}\,dV$$

$$= \oint_{S(V)} \underbrace{\delta\vec{D}}_{\sim 1/r^2}\,\underbrace{\varphi}_{\sim 1/r}\cdot\underbrace{\vec{n}\,dS}_{\sim r^2} + \int_V \delta\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV \xrightarrow{V\to\infty} \delta W = \int_V \delta\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV$$

$\sim \frac{1}{r}\to 0$

(v diel. očekávám: $w_{e\,DIEL} = \varepsilon_R w_{e\,vakuum} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_R E^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ pro $\vec{E} \parallel \vec{D}$)

$\delta W = \int_V \delta\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\cdot V$ — sedí

$\varepsilon \int_V \delta\vec{E}\cdot\vec{E}\,dV = \varepsilon \int_V \int_0^E \delta\vec{E}\cdot\vec{E}\,dV = \varepsilon \int_V \frac{1}{2}E^2\,dV$

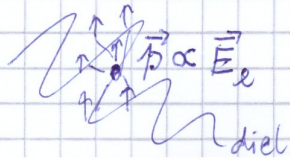
(integrand, konst)

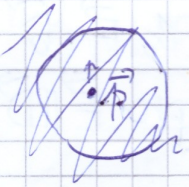
DIELEKTRICKÉ VLASTNOSTI LÁTEK

- dielektrika = izolátory
- síla diel. = max. pole, které izol. vydrží, než se prorazí
- diel. homogenní × nehomogenní, izotropní × anizotropní
- diel. tvrdá, měkká (pružná)

pružné diel.	isot.	anisot.
homog.	χ	$\overleftrightarrow{\chi}$
nehomog.	$\chi(\vec{r})$	$\overleftrightarrow{\chi}(\vec{r})$

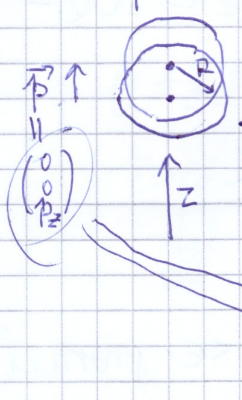
- mechanismy polarizace
  - elektronový = vychylují se e^- (p^+)
  - iontový = vychylují se ionty (Na^+ Cl^-)
  - (dipólový) orientační = natáčejí se celé molek. (δ^+, δ^-)
  - prostorový náboj na nehomogenitách = skoky na hranicích zrn / domén krystalu
- ε záleží na frekvenci vnějšího pole – při vyšší frekvenci se nestíhají dost rychle přetáčet velké dipóly (první zmizí, pak molek., ionty a elektrony (protony))
- tzv. lokální pole – dipóly se navzájem ovlivňují (mikroskopicky), musím uvolnit Lorentzem vnějšího pole





model tzv. Lorentzovy koule – dipóly vevnitř se vyrovnají, uvažují ty vevnitř

Př.: pole uvnitř dielektrické koule



$+Q \quad -Q \qquad Q = \frac{4}{3}\pi R^2 N q \qquad \vec{p} = \vec{d} Q$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{d}\cdot\frac{4\pi}{3} R^3 N q \vec{r}}{r^3} =$$

$$= \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{R^3 N q \vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{R^3 \vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$$\rightarrow = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{R^3 p_z \cdot z}{r^3}, \text{ když } R = r$$

$$\varphi = \frac{1}{3\varepsilon_0} p_z \cdot z \quad (\text{splňuje } \Delta\varphi = 0)$$

pole: $\underbrace{\vec{E}_{KOULE}}_{\text{KOULE}} = -\nabla\varphi = \left(0, 0, -\frac{1}{3\varepsilon_0} p\right)$ – homogenní

toto pole navíc

$$\Rightarrow \vec{E}_{LOKÁLNÍ} = \vec{E}_{VNĚJŠÍ} + \underbrace{\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}_{\vec{E}_{KOULE}} + \underbrace{\vec{E}_{UVNITŘ\ KOULE}}_{\text{závisí na látce, pro amorfní nebo kubicky / radiálně sym. můžeme } = 0}$$

$$\vec{P} = N\beta \vec{E}_{LOKÁLNÍ}, \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(\varepsilon_r - 1)}_{\chi} \vec{E}_{VNĚJŠÍ}$$

$$\frac{\vec{P}}{N\beta} = \vec{E}_{VNĚJŠÍ} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \quad \text{– proč ne } \vec{P}?$$

$$\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_{VNĚJŠÍ}}{N\beta} = E_{VNĚJŠÍ} + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{3\varepsilon_0} \vec{E}_{VNĚJŠÍ}$$

$$\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{N\beta} = 1 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{3\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = N\beta\left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{3}\right)$$

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{N\beta}{3\varepsilon_0}(3 + \varepsilon_r - 1)$$

$$\boxed{\frac{N\beta}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}}$$

přibližně pro $\varepsilon_r \approx 1$: $\boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{N\beta}{\varepsilon_0}}$

orientační polarizace: natáčení do směru pole

uvažujeme pole ve směru osy z, energie dipólků v poli závisí na úhlu mezi $\vec{E}$ a $\vec{p}$

počet dipólku stejné energie: (obsazovací číslo)

$$dN_\xi \underbrace{\sim e^{-\frac{W}{kT}}}_{\text{Boltzmann}}, \quad W = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

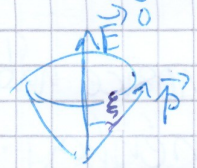
$$\Rightarrow dN_\xi \sim e^{\frac{\vec{p}\cdot\vec{E}}{kT}}, \quad \vec{p}\cdot\vec{E} = p\cdot E\cdot\cos\xi$$

$$\Rightarrow dN_\xi = C e^{\frac{p\cdot E\cdot\cos\xi}{kT}}\cdot 2\pi \overset{=1}{R}\sin\xi\, R\, d\xi$$

$\Rightarrow$ celkový počet dipólů

$$N = \int_0^\pi dN_\xi = \int_0^\pi C\sin\xi\, e^{\frac{pE\cos\xi}{kT}}\, d\xi, \quad \text{když } \frac{pE}{kT} = a,\ \cos\xi = x$$

$$\Rightarrow -\sin\xi\, d\xi = dx$$



potom celkový moment:

$$P = \int_0^\pi p\cos\xi\, C\sin\xi\, e^{a\cos\xi}\, d\xi = -Cp\int_1^{-1} x e^{ax}\, dx =$$

$$= -Cp\left[\frac{1}{a}xe^{ax}\Big|_1^{-1} - \int_1^{-1}\frac{1}{a}e^{ax}\, dx\right] =$$

$$= -Cp\left[\frac{1}{a}\left(-e^{-a} - e^{a}\right) - \frac{1}{a^2}\left(e^{-a} - e^{a}\right)\right]$$

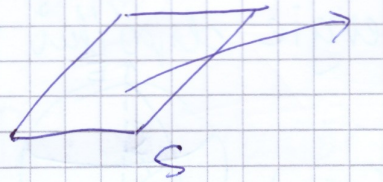
viz výše $C = -Na\frac{1}{e^{-a} - e^{a}}$

$$\Rightarrow P = Na\frac{1}{e^{-a} - e^{a}}\, p\, \frac{1}{a}\left[-\left(e^{a} + e^{-a}\right) - \frac{1}{a^2}\left(e^{-a} - e^{a}\right)\right]$$

$$P = Np\left[\frac{e^{a} + e^{-a}}{e^{a} - e^{-a}} - \frac{1}{a}\right] = Np\left[\operatorname{cotanh} a - \frac{1}{a}\right]$$

pro $a \ll 1$: $P \approx$ viz prez.

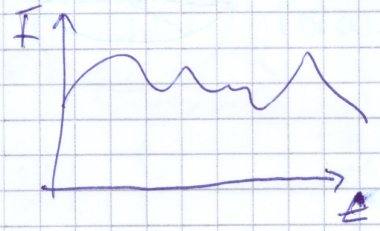
4. Elektrický proud



Δt

ΔQ

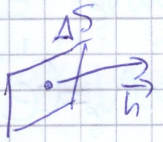
$$I_{t,t+\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \rightarrow \boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$



$I = I(t)$

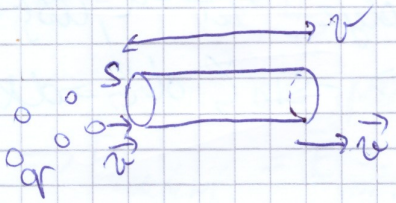
$$[I] = \frac{C}{s} = A$$

objemová hustota proudu: $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$



$$\Delta I_{\Delta S} = j \cdot \vec{n}\, dS$$

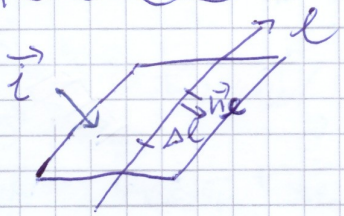
$\Rightarrow I_S = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n}\, dS$ — klasický tok



$I = S v N q$ — pro „kuličkové" nosiče náboj

$j = \frac{I}{S} = N v q$ — pozor na znaménka

plošná hustota proudu: $\vec{i} = \vec{i}(\vec{r}, t)$



$$\Delta I_{\Delta l} = \vec{i} \cdot \vec{n}_l\, \Delta l$$

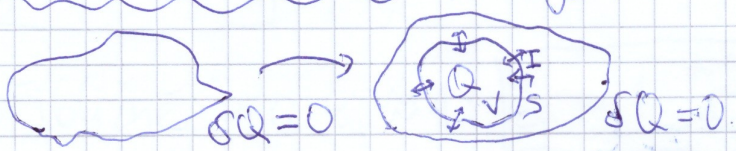
$\Rightarrow I_{\Delta l} = \int_l \vec{i} \cdot \vec{n}_l\, dl$ — klasická cirk.

el. proud
- konvekční = něco pohyblivé unáší náboj z A do B
- kondukční = náboj se hýbe látkou, která je v klidu

ROVNICE KONTINUITY PROUDU

zákon zachování náboje: čas Δt: teče ΔQ

teče $I_{t,t+\Delta t}\, \Delta t$



$\Rightarrow \delta Q = \Delta Q + I\Delta t = 0$ – to co vyteče proudem musím odebrat na náboji

$I + \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 0$

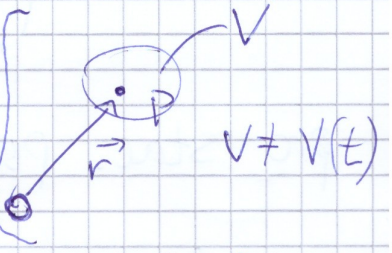
$\hookrightarrow \boxed{\lim_{t\to 0} I(t) + \frac{dQ}{dt} = 0}$ ROVNICE KONTINUITY PROUDU

$$I(t) = \oint_{S(V)} \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\,dS$$

$$Q(t) = \int_V \varrho(\vec{r},t)\,dV$$

$$\Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{j}\cdot\vec{n}\,dS + \frac{d}{dt}\int_V \varrho(\vec{r},t)\,dV = 0$$

$$\int_V \left[\nabla\cdot\vec{j}\,dV + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right]dV = 0 \;,\; dV \to 0$$



$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \varrho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0}$$ ROV. KONT. PROUDU V DIFERENCIÁLNÍM /LOKÁLNÍM TVARU

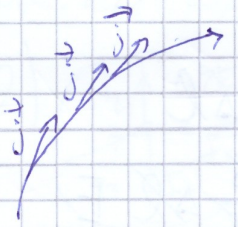
• Pozn.: spec. případ rov. kont. pro stac. proud

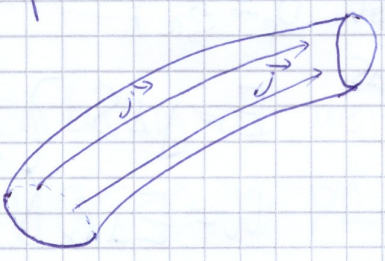
$I(t) = I_0$, $I_0 + \frac{dQ}{dt} = 0$ – Q by rostlo nade všechny meze

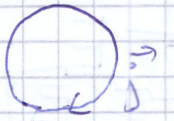
$\Rightarrow$ vyřešíme tím, že $\frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow I_0 = 0$ – fyzikálně nikoliv že nic neteče, ale že co uteče, to vyteče

$\Leftrightarrow \nabla\vec{j}(\vec{r}) = 0$ (viz dif. tvar.)

$\Rightarrow$ proudová čára $\Rightarrow$ proudová trubice





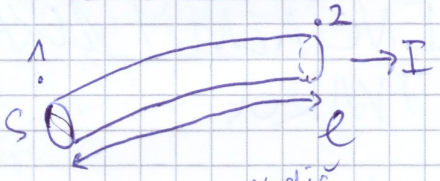
$\nabla\cdot\vec{j} = 0 \Rightarrow$  trubice končí v nekonečnu

STACIONÁRNÍ ELEKTRICKÉ POLE

el. pole
- statické = pole i náboje v klidu
- stacionární = pole nezávisí na čase, ale závisí na poloze, teče proud (stacionární) – náboje se hýbou
- kvazistacion. = pole závisí na čase, ale nějak krotce
- nestacion. = vše se hýbe a mění

pro stac. pole platí všechny zákony a rce z elstat.

OHMŮV ZÁKON



$I \neq I(t)$

rozdíl proti elstat. – vodič není ustálený, hýbou se náboje do něj i z něj – nevzniká kompenzační pole – ve vodiči je pole – teče proud

$\varphi_2 = \varphi_1 - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$U = -(\varphi_2 - \varphi_1) = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$\boxed{I = \frac{1}{R} U}$ OHMŮV ZÁKON

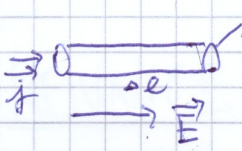
R – el. odpor, $R = \varrho_R \frac{l}{S}$, kde ϱ_R je měrný odpor – vlastnost materiálu

$[R] = \Omega$, $[\varrho_R] = \Omega m$

G – vodivost, $G = \frac{1}{R}$

$[G] = S$ – siemens

(měrná vodiv. $\sigma_R = \frac{1}{\varrho_R}$)



rovnob. proud. trubice !

$E = j \Delta S$
$U = E \Delta l$
$\Rightarrow j \Delta S = \frac{1}{R} E \Delta l$

$j \Delta S = \frac{1}{\varrho_R} \frac{\Delta S}{\Delta l} \Delta l E$

$j = \frac{1}{\varrho_R} E$

pokud $\varrho_R \neq \varrho_R(\vec{r})$: $\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\varrho_R} \vec{E}}$ LOK. TVAR OHM. ZÁKONA

JOULEŮV ZÁKON

q $\vec{F}_E = q\vec{E}$ $\quad j = Nqv$

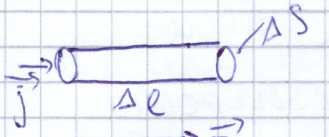
$F = konst. \Leftarrow j = konst.$

$\hookrightarrow a = konst.$, ale my chceme v konst.

ve vakuu platí, v materiálu náboj interaguje s částicemi mříže – je zpomalován, mříž se zahřívá = el. odpor, toto zahřívání popisuje Joulův zákon

u $\quad \Delta W = \Delta Q u = I \Delta t u = I u \Delta t$

čas Δt $\quad q, u$ $\quad P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = Iu \overset{Ohm.}{=} RI^2$



$u = E \Delta l$

$I = j \Delta S$

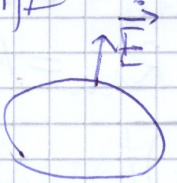
rovnoměrný proud. trubice

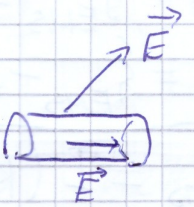
$P = uI = E \Delta l j \Delta S = E j \Delta V$

obj. hust. výkonu $p = E \cdot j$, $p = p(\vec{r})$

vektorově v obecném směru: $\boxed{p = \vec{E} \cdot \vec{j}}$

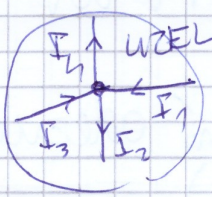
Pozn.: 1) $\vec{E} = ?$





– v reálu složitější v obec. směru pole

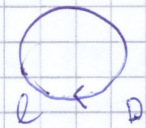
elstat.: $E_{t1} = E_{t2}$

2) 

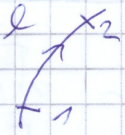
$I_0 = 0$ – zabalím do nějaké plochy

$\Rightarrow$ 1. KIRCHHOFFOVO PRAVIDLO

OBVOD



$\oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$ $\qquad \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = U$



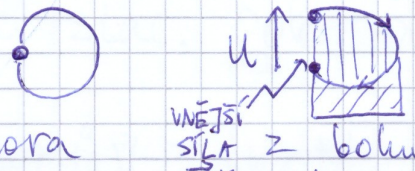
pro tzv. ohmický vodič: $\vec{E} = \varrho_R \cdot \vec{j}$: $\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} =$

$= \int_1^2 \varrho_R \cdot \vec{j}\cdot d\vec{\ell}$, $\vec{j} \parallel d\vec{\ell}$

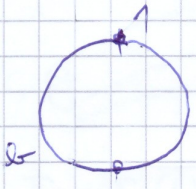
$\Rightarrow = \int_1^2 \varrho_R \frac{1}{S} \overbrace{jS}^{I}\, d\ell = I \int_1^2 \varrho_R \frac{d\ell}{S} = I \cdot R_{12}$ – očekáváme

pro uzav. křivku: $U = 0 \Rightarrow I = 0$

– pro rozpohybování musíme dodat energii, popisujeme vnější tzv. elektromotorickou silou



pole $\vec{E}^*$ – ξ_{EMS} – elektromotorická síla (el. napětí)



(A) $\int_2^1 (\vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \underbrace{\vec{E}^*\cdot d\vec{\ell}}_{\xi_{EMS}}) = I R_{21\ell}$ – zdroj v úseku ℓ

(B) $\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$

$U_{12} = U_0$ – svorkové (el.) napětí

odpor zdroje (vnitřní)

$\Rightarrow U_0 = -\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \overset{(A)}{\Rightarrow} -U_0 + \xi_{EMS} = I R_{21\ell} = I R_i$

$U_0 = \xi_{EMS} - I R_i$, $R_{12a} = R_e$ – externí

$\overset{(A)}{\Rightarrow} \underbrace{\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{0 \text{ dle (B)}} + \boxed{\xi_{EMS} = I(R_i + R_E)}$

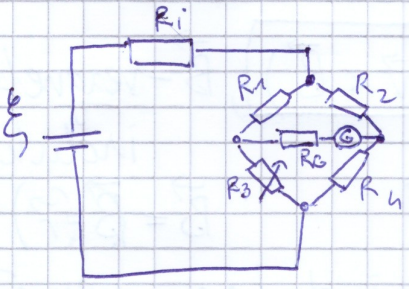
2. KIRCHHOFFOVO PRAVIDLO

Lineární obvody – prvky mají lineární odezvu (parametr prvků R_i nezávisí na U, I)

obvod = uzly a větve (souvislý graf, vrcholy a hrany)

Smyčka = oblouk v obvodu (cesta v grafu)

Př.: Wheatstoneův most



R_1, R_2 známé
R_3 měnitelný, známý
R_4 ?? .

nastavuje se R_3 dokud $I_G = 0$ — „vyvážený" most, pak 1. K. P. $\Rightarrow R_1 R_4 = R_2 R_3$

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

bez rovnováhy (bez nastavitelného R_3) lze taktéž užitím obou 1. K. P.

viz prezentace { taktéž Maxwellovou metodou smyčkových proudů nebo také metodou uzlových napětí (proud. zdroj)

ideální napěťový zdroj × ideální proudový zdroj (× reálný zdroj)

U = konst. × I = konst.

$\mathcal{E}$ $\frac{1}{T}$ × I ∅

viz prez. taktéž pomocí Théveninovy věty

5. Stacionární magnetické pole

el. pole:

$\vec{F} = Q\vec{E}$

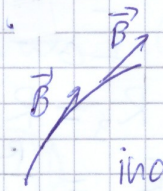
mag. pole: $[\vec{B}]$ – T – tesla

$\vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B})$, $\vec{B}$ – magnetická indukce

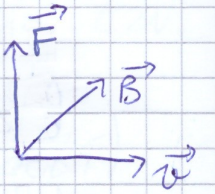
Loren

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$

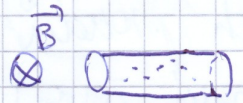
síla mag. pole není ve směru mag. indukce – nemáme siločáry, ale



ind. čáry většinou kolmo z/do papíru ⊙ ⊗



mag. síla nekoná práci: $\Delta W = \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = Q\underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{\text{kolmé} \Rightarrow = 0} \Delta t = 0$



$\vec{j} = Nq\vec{v}$ $\quad \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$ – na 1

na 1 cm³: $\vec{f}_L = \underbrace{Nq\vec{v}}_{\vec{j}} \times \vec{B} = \boxed{\vec{j} \times \vec{B} = \vec{f}_L}$

el. pole:

$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$

mag. pole:

$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = 0$

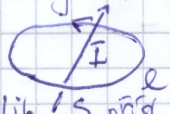
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ } stejné odvození, z toho plyne neexistence „magnetických nábojů"

$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS$ – magnetický indukční tok $[\Phi_M] = W$ – weber

AMPÉREŮV ZÁKON

el. pole: $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

mag. pole: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$